Correction

Exercice I : Etude mécanique

18 pts

I.1. Le mobile est soumis à :

- son poids $\overrightarrow{P}$ vertical dirigé vers le bas
- la réaction du support $\overrightarrow{R}$ verticale dirigée vers le haut
- la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F_r} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_x} = -kx_G\overrightarrow{e_x}$
- la force de frottement visqueux $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v_G}\overrightarrow{e_x} = -\alpha\frac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_x}$
- la force d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{F_i} = -m\overrightarrow{a_M}$

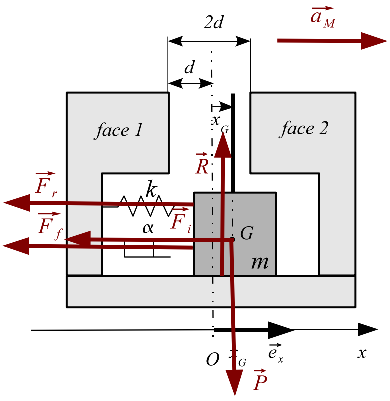

FIGURE 4 – Forces s'exerçant sur la partie mobile du capteur MEMS.

2 pts pour les forces et 1 pt pour le schéma, R et P en option

I.2. Composantes des forces sur l'axe Ox :

- $\overrightarrow{P}.\overrightarrow{e_x} = 0$
- $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{e_x} = 0$
- $\overrightarrow{F_r}.\overrightarrow{e_x} = -kx_G$
- $\overrightarrow{F_f}.\overrightarrow{e_x} = -\alpha\frac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{d}t}$
- $\overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{e_x} = -ma_M$

1 pt

I.3. Deuxième loi de Newton pour le mouvement du mobile de masse m.

$$\begin{aligned}
\sum \overrightarrow{F} &= m\vec{a_G} \\
\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F_f} + \overrightarrow{F_i} &= m\vec{a_G} \\
0 + 0 - kx_G - \alpha\frac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{d}t} - ma_M &= m\frac{\mathrm{d}^2x_G}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

1 pt pour la loi et 1 pt pour la projection

I.4.

$$\begin{aligned}
kx_G - \alpha\frac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{d}t} - ma_M &= m\frac{\mathrm{d}^2x_G}{\mathrm{d}t^2} \\
\frac{\mathrm{d}^2x_G}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x_G &= -a_M \\
\frac{\mathrm{d}^2x_G}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2x_G &= -a_M
\end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{m}{\alpha} \quad \text{dimension : T} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{dimension : T}^{-1} \end{aligned}$$

1,5 pts + 0,5 pour les dimensions

I.5 On cherche des solutions de l'équation homogène du type : $x_G(t) = Ae^{rt}$. On obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{1}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$$

Amortissement critique :

$$\Delta = 0 = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{m} = 2\omega_0$$

Donc

$$\tau = \frac{1}{2\omega_0} = 14,3\,\mu\text{s}$$

et :

$$\alpha = 2m\omega_0 = 4,9 \times 10^{-5}\,\text{kg/s}$$

1 pt pour l'équation caractéristique + 0,5 pour τ et α + 0,5 pour l'AN

I.6 $\tau = \frac{m}{\alpha} = 9,33\,\mu\text{s}$

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 = 6,58 \times 10^9\,\text{s}^{-1}$$

$\Delta > 0$, l'amortissement est sous critique.
0,5 pt + 0,5 pour l'AN (donner 1 pt si équation caractéristique et si pas donnée précédemment

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2} = -9,41 \times 10^4\,\text{s}^{-1} \\ \omega_2 &= -\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2} = -1,30 \times 10^4\,\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Solution de l'équation homogène :} \quad & x_{GH} = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_1 t} \\ \text{Solution particulière :} \quad & x_{GP} = -\frac{a_M}{\omega_0^2} \\ \text{Solution générale :} \quad & x_{GH} = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_1 t} - \frac{a_M}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

1pt pour la solution homogène + 1 pt pour la particulière et générale + bonus 1 pt calcul de $\omega_{1,2}$

I.7 ω_1 et ω_2 sont négatifs donc les termes exponentiels tendent vers 0. Au bout d'un temps de 5 à 10 fois la constante de temps, le terme exponentiel est proche de 0. Le premier terme exponentiel devient négligeable au bout de $10 \times (\frac{-1}{\omega_1}) \simeq 11\,\text{ms}$, le second au bout de $10 \times (\frac{-1}{\omega_2}) \simeq 77\,\text{ms}$. On peut donc considérer que la solution homogène correspondant au régime transitoire devient négligeable au bout de $77\,\text{ms}$. En régime permanent

$$x_{GP} = -\frac{a_M}{\omega_0^2} = -8,16 \times 10^{-10} \times a_M$$

Le déplacement x_G du mobile est proportionnel à l'accélération a_M qui s'exerce sur la manette.

1 pt

I.8.a. Dans la base cylindrique :

$$\begin{aligned} a_{M\rho} &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ a_{M\varphi} &= \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \end{aligned}$$

$\rho = R = cte$ donc :

$$\begin{aligned} a_{M\rho} &= -R\dot{\varphi}^2 = -\frac{V_M^2}{R} \\ a_{M\varphi} &= R\ddot{\varphi} = R\frac{\mathrm{d}v_M}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

2 pts

I.8.b. Au point B, la vitesse est constante donc $a_M = \frac{V_M^2}{R}$.
1 pt

I.8.c. $a_M = 6,25\,\mathrm{m/s^2}$. Donc le déplacement $x_G = 5,1 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$.
1 pt

Exercice II : Etude électrique

12 pts

II.1.

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Cu_c(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

.
2 pts

II.2

$$\begin{aligned} u_{AB} = E = u_{c1}(t) + Ri_1(t) &= u_{c1}(t) + RC_1\frac{\mathrm{d}u_{c1}}{\mathrm{d}t} \\ u_{AB} = E = u_{c2}(t) + Ri_2(t) &= u_{c2}(t) + RC_2\frac{\mathrm{d}u_{c2}}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_{c1}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_1}u_{c1}(t) &= \frac{E}{\tau_1} \\ \frac{\mathrm{d}u_{c2}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2}u_{c2}(t) &= \frac{E}{\tau_2} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= RC_1 \\ \tau_2 &= RC_2 \end{aligned}$$

Application numérique : $\tau_1 = \tau_2 = 10\,\mathrm{ms}$ 1,5 pts + 0,5 pour l'AN

II.3

$$\begin{aligned} \text{Solution de l'équation homogène :} \quad & u_{C1} = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} \\ \text{Solution particulière :} \quad & u_{C1} = E \\ \text{Solution générale :} \quad & u_{C1} = E + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} \end{aligned}$$

à $t = 0$, $u_{c1}(0) = 0\,\mathrm{V}$ donc $A = -E$

$$u_{C1} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$
$$u_{C2} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$

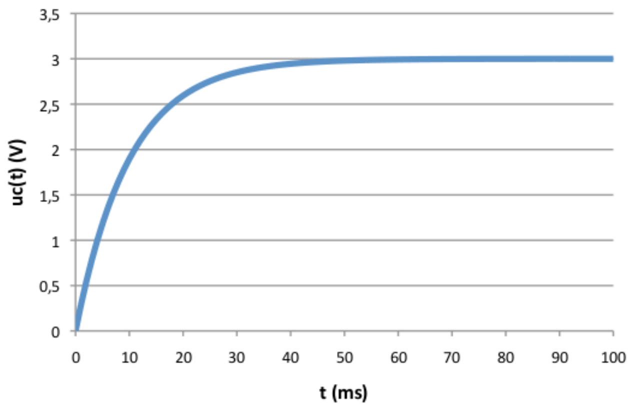

FIGURE 5 – Charge du condensateur sous tension constante

3 pts (sol particulière ; sol homogène, solution générale + 1 pt pour le graphique

II.4

Pour le condensateur C_1 :

$$\underline{e}(t) = \underline{u_{c1}}(t) + RC_1\frac{\mathrm{d}\underline{u_{c1}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned} Ee^{j\omega t} &= \underline{U_{c1}}e^{j\omega t} + RC_1 j\omega \underline{U_{c1}}e^{j\omega t} \\ E &= \underline{U_{c1}} + RC_1 j\omega \underline{U_{c1}} \\ E &= \underline{U_{c1}}\left(1 + j\omega RC_1\right) \\ \underline{U_{c1}} &= \frac{E}{1 + j\omega RC_1} \end{aligned}$$

De même pour le condensateur C_2 :

$$\underline{U_{c2}} = \frac{E}{1 + j\omega RC_2}$$

2 pts pour une des deux

II.5

$$U = ER\omega|C_2 - C_1|$$

$$C_2 - C_1 = C_0 \frac{d}{d - x_G} - C_0 \frac{d}{d + x_G} = C_0 \frac{2dx_G}{(d + x_G)(d - x_G)} = C_0 \frac{2xd_G}{d^2 - x_G^2}$$

et finalement :

$$U = ER\omega C_0 \frac{2x_G}{d^2 - x_G^2}$$

Remarque : $x_G << d$ donc $\frac{2x_G}{d^2 - x_G^2} \simeq \frac{2x_G}{d}$ et la réponse du capteur est linéaire.

2 pts

II.5

$$U = ER\omega C_0 \frac{2x_G}{d^2 - x_G^2} = 35,5\,\mathrm{mV}$$

1 pt